ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

15 parvis René-Descartes
BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tél. +33 (0)4 37 37 60 00
www.ens-lyon.fr

Concours d'entrée

Sujets 2022
Épreuves orales

Série Sciences économiques et sociales

UNIVERSITÉ DE LYON

ENS DE LYON

Économie

Dossiers :

Sujet 1 : Les appariements sur le marché du travail.
Document 1: Pourquoi les entreprises se plaignent-elles de difficultés de recrutement alors que le chômage est encore élevé? Source : France Culture, 17 décembre 2021

Sujet 2 : Un État trop endetté, est-ce un problème ?
Document 1 : Dette des administrations publiques (en % du PIB) dans quelques pays
Source : OCDE
Document 2 : Une solution « à la japonaise » pour éviter la crise des dettes souveraines
Source : The Conversation, 27 avril 2020

Sujet 3 : Taxer l'héritage, un outil efficace pour réduire les inégalités ?
Document 1 : Les droits de succession sont-ils un outil efficace pour réduire les inégalités ?
Source : The Conversation, 21 février 2022

Sujet 4 : Plus de concurrence est-il favorable pour le consommateur ?
Document 1: La libéralisation du secteur ferroviaire ne devrait pas faire baisser significativement les prix de nos voyages
Source : The Conversation, 26 janvier 2022

Sujet 5 : L'État doit-il soutenir la demande privée ou doit-il privilégier la demande publique ?
Aucun document

Sujet 6 : Transferts sociaux et chômage.
Aucun document

Sujet 7 : Faut-il lutter contre l'inflation ?
Aucun document

Sujet 8 : Le rôle des labels de qualités.
Document 1 : Document : Débat : Le procès de Saint-Émilion condamne-t-il le classement des vins ?
Source : The conversation, 28 septembre 2021, https://theconversation.com/leproces-de-saint-emilion-condamne-t-il-le-classement-des-vins-168866.

Sujet 9 : Faut-il taxer le capital davantage ?
Document 1: Document 1 : 24 % des ménages détiennent 68 % des logements possédés par des particuliers
Source : INSEE Référence 25/11/2021
Document 2 : Inégalité de capital - part du capital détenu par les 1% les plus riches (en rouge) et part du capital détenu par les 10% les plus riches (en bleu), en France de 1930 à 2020.
Source : World Inequality Database (avril 2022)

Sujet 10 : Quel est le rôle des prix dans une économie ?
Aucun document

Sujet 11 : Qu'est-ce qu'un bon impôt ?
Aucun document

Sujet 12 : Faut-il relocaliser toutes les industries en France ?
Document 1: Relocaliser, réindustrialiser : dans quels buts ?
Source : La lettre du CEPII, Septembre 2020, http://www.cepii.fr/PDF_PUB/lettre/2020/let410.pdf.

Sujet 13 : Faut-il réduire le pouvoir de marché des grandes entreprises ?
Document 1 : Publicité en ligne : Google condamné à 220 millions d'euros d'amende pour abus de position dominante
Source : Les Echos, 7 juin 2021

Sujet 14 : La fin de la mondialisation, danger ou utopie ?
Document 1: Document : La fin de la mondialisation ?
Source : Les Echos – 4 avril 2022

Sujet 15 : Faut-il intervenir pour limiter la hausse des prix de l'énergie ?
Document 1 : Inflation des prix de l'énergie : que peuvent faire les États et les banques centrales ?
Source : The conversation, 2 février 2022, https://theconversation.com/inflation-desprix-de-lenergie-que-peuvent-faire-les-etats-et-les-banques-centrales-176090.

Sujet 16 : Faut-il augmenter les impôts ?
Document 1 : Augmenter ou réduire les impôts : quels effets sur l'économie ?
Source : Lettre du CEPII, n. 386, Mars 2018, http://www.cepii.fr/PDF_PUB/lettre/2018/let386.pdf.
Document 2 : Augmenter ou réduire les impôts : quels effets sur l'économie ?
Source : Lettre du CEPII, n. 386, Mars 2018, http://www.cepii.fr/PDF_PUB/lettre/2018/let386.pdf

Sujet 17 : Dette publique et inflation.
Document 1 : La dette publique, boulet des banques centrales dans la lutte contre l'inflation.
Source : The conversation, 29 novembre 2021, https://theconversation.com/la-dettepublique-boulet-des-banques-centrales-dans-la-lutte-contre-linflation-172629.

Sujet 18 : Pourquoi et comment redistribuer ?
Aucun document.

Sujet 19 : Faut-il privatiser la SNCF ?
Document 1 : La libéralisation du secteur ferroviaire ne devrait pas faire baisser significativement les prix de nos voyages
Source : The conversation, 26 janvier 2022, https://theconversation.com/laliberalisation-du-secteur-ferroviaire-ne-devrait-pas-faire-baisser-significativement-lesprix-de-nos-voyages-175588

Sujet 20 : Dans quelle mesure un revenu universel est-il efficace économiquement ?
Document 1 : Document : Débat - Un salaire à vie ou un revenu universel ?
Source : The conversation, 20 mars 2022, https://theconversation.com/debat-unsalaire-a-vie-ou-un-revenu-universel-177709

Sujet 21 : Dans quelle mesure le financement de l'éducation doit-il être public ?
Aucun document.

Sujet 22 : Faut-il augmenter le budget de la défense ?
Document : Le casse-tête économique des dépenses militaires
Source : Innovations, 2013, n. 42.

Sujet 23 : Equilibre de marché et efficacité économique.
Aucun document

Sujet 24 : Quels outils pour réduire le chômage ?
Document 1 : Document : Dégressivité des allocations-chômage : que peut-on attendre ?
Source : OFCE le blog, 7 décembre 2020, https://www.ofce.sciences-po.fr/blog/degressivite-des-allocations-chomage-que-peut-on-attendre/

Sujet 25 : Dette publique et richesse nationale
Document 1 : Pourquoi la dette publique effraie-t-elle autant ?
Source : B. Massenot, The Conversation, 25 avril 2021
Document 2 : Budget de l'État voté en quelques chiffres
Source : Direction du budget, 24 février 2020

Sujet 26 : Faut-il protéger les grandes entreprises ?
Aucun document.

Sujet 27 : De quels outils disposent les banques centrales pour lutter contre la hausse des prix ?
Document 1: Inflation des prix de l'énergie : que peuvent faire les États et les banques centrales ?
Source : The Conversation, 2 février 2022

Sujet 28 : Anticipations et équilibre de sous-emploi
Aucun document.

Sujet 29 : La taxation est-elle le meilleur moyen de réguler les externalités négatives ?
Aucun document.

Sujet 30 : Epargne et taux d'intérêt.
Aucun document

Sociologie

Dossiers :

1. Sales boulots

Sources

- Boudra Leïla, « Le tri des déchets ménagers. Inégalités de genre et santé au travail », *Travail, genre et sociétés*, 2020/1, n°43, p 67-83.
- Bouffartigue Paul, Pendariès Jean-René, Bouteiller Jacques, « La perception des liens travail/santé. Le rôle des normes de genre et de profession », *Revue française de sociologie*, 2010/2 Vol. 51 | pages 247 à 280.

2. Choisir un prénom

Sources

- Coulmont Baptiste, Simon Patrick, « Quels prénoms les immigrés donnent-ils à leurs enfants en France ? », Population et sociétés, Numéro 565 avril 2019
- Coulmont Baptiste, Prénom et structure sociale, in Paradeise Catherine, Lorrain Dominique et Demazière Didier, Les sociologies françaises : héritages et perspectives, 1960-2010, Presses Universitaires de Rennes, pp.123-135, 2015

3. Humiliations ordinaires

Sources

- Jounin Nicolas, « Humiliations ordinaires et contestations silencieuses. La situation des travailleurs précaires des chantiers », *Sociétés contemporaines*, 2008/2 (n°70), pages 25 à 43

4. Qu'est-ce qui fait tenir les aides-soignantes ?

Sources

- Bouffartigue Paul, Pendariès Jean-René, Bouteiller Jacques, « La perception des liens travail/santé. Le rôle des normes de genre et de profession », *Revue française de sociologie*, 2010/2 Vol. 51 | pages 247 à 280.
- Orange Sophie, Renard Fanny, Et pourtant elles restent… Ce qui fait tenir les aides soignantes, *AOC*, 16 juin 2022.

5. La jeunesse dans la crise du Covid

Sources

- Cayouette-Remblière, Joanie, et Élie Guéraut. « Chapitre 4. Travailler, se loger et romper l'isolement. Une jeunesse fragilisée et divisée par le premier confinement », Yaëlle Amsellem-Mainguy éd., Jeunesses. D'une crise à l'autre. Presses de Sciences Po, 2022, pp. 103-119.
- Coquard, Benoît, et Yaëlle Amsellem-Mainguy. « Chapitre 8. « En avoir ou pas ». Ressources sociales des jeunes ruraux en contexte de crise sanitaire », Yaëlle Amsellem-Mainguy éd., Jeunesses. D'une crise à l'autre. Presses de Sciences Po, 2022, pp. 165-178.

6. Inégalités face au covid 19

Sources

- Dubost Claire-Lise, Pollack Catherine, Rey Sylvie (coord.), Les inégalités sociales face à l'épidémie de Covid-19. Etats des lieux et perspectives, Dossiers de la DREES, n°62, juillet 2020

7. La gestion des pauvres

Sources

- Cacciari, Joseph. « Les guichets de la misère énergétique. Le traitement social des impayés d'énergie des ménages comme mode de production, de tri et de moralisation des « consommateurs » à l'ère de la transition énergétique », Sociétés contemporaines, vol. 105, no. 1, 2017, pp. 53-78.

8. Classer ses musiques en régime numérique

Sources

- Granjon Fabien, Combes Clément, « La numérimorphose des pratiques de consommation musicale. Le cas de jeunes amateurs », *Réseaux,* 2007/6-7, n° 145-146, pages 291 à 334
- Gilliotte Quentin, « Stock et flux. Une analyse des nouvelles pratiques de classement des biens culturels numériques », *Réseaux,* 2022/2-3, n°232-233, pages 229 à 260

9. Etre de droite et de classes populaires

Sources

- Challier, Raphaël. *Simples militants. Comment les partis démobilisent les classes populaires*, PUF, Paris, 2021.

Méthodologie :
L'enquête a été menée à Granin, une commune de la banlieue francilienne, en voie de gentrification. La droite fait partie de l'opposition municipale. L'enquête porte sur les « simples militants », qui s'engagent en politique sans en vivre.

10. La lecture et le numérique

Sources

- Vincent Gérard Armelle, Poncet Julie, *Les Français et la lecture- 2019,* CNL-Ipsos
- Guittet Emmanuelle, « « Moi, il me faut du papier » Analyse d'une difficile et inégale conversion des lecteurs et lectrices de romans au numérique », *Biens symboliques*, 7/2020

11. Les classes moyennes : une catégorie floue ?

Sources

- Bernard Lise, « Le capital culturel non certifié comme mode d'accès aux classes moyennes. L'entregent des agents immobiliers », Actes de la recherche en sciences sociales, 2012/1 n° 191-192, pages 68 à 85.
- Dylan Alezra et Claudia Senik, La France, société de classes moyennes ou pyramide inégalitaire ? Observatoire du Bien-être du CEPREMAP, n°2022-07, Mai 2022.

12. Lire les corps

Sources

- Delpierre Alizée, « Les « bons » corps de la domesticité. Recrutement physique et jugements esthétiques du personnel de maison des grandes fortunes », Genèses, 2021/2, n°123

13. Les enfants d'enseignants

Sources

- Farges, Géraldine. « Du secondaire au supérieur, « l'effet parent enseignant » au regard de l'hétérogénéité des statuts parentaux », *Revue française de pédagogie*, vol. 203, no. 2, 2018, pp. 69-90.
- Farges, Géraldine. « Approche de long terme des pratiques culturelles légitimes des enseignants. Stabilité dans une période de changement ? », *Revue française de sociologie*, vol. 56, no. 2, 2015, pp. 261-300.

14. La chasse : une pratique culturelle

Sources

- Fradkine, Héloïse. « Fouler les bois & rasseoir une emprise. La chasse à courre comme inscription spatiale du pouvoir social », *Agone*, vol. 51, no. 2, 2013, pp. 153-168.
- Mischi, Julian. « Les militants ouvriers de la chasse. Éléments sur le rapport à la politique des classes populaires », *Politix*, vol. 83, no. 3, 2008, pp. 105-131.

15. La socialisation raciale

Sources

- Brun Solène, « La socialisation raciale : enseignements de la sociologie étatsunienne et perspectives françaises, *Sociologie*, 2022/2 (vol. 14), pages 199 à 217 (documents 1 et 2).

16. Immigration et réussite scolaire

Sources

- Ichou, Mathieu, Anne Goujon, et l'équipe de l'enquête DiPAS. « Le niveau d'instruction des immigrés: varié et souvent plus élevé que dans les pays d'origine », *Population & Sociétés*, vol. 541, no. 2, 2017, pp. 1-3.
- Ichou, Mathieu, et Marco Oberti. « Le rapport à l'école des familles déclarant une origine immigrée: enquête dans quatre lycées de la banlieue populaire », *Population*, vol. 69, no. 4, 2014, pp. 617-657.

17. Le capital militant

Sources

- Matonti Frédérique, Poupeau Franck, « Le capital militant, essai de définition », *Actes de la recherche en sciences sociales*, 2004/5 no 155, pages 4 à 11.
- Wagner Anne-Catherine, « Syndicalistes européens. Les conditions sociales et institutionnelles de l'internationalisation des militants syndicaux », *Actes de la recherche en sciences sociales*, 2004/5 no 155, pages 12 à 33.

18. Mesurer la pauvreté

Sources

- Duvoux, Nicolas, et Adrien Papuchon. « La pauvreté subjective comme mesure de l'insécurité sociale. Une comparaison des différents indicateurs de pauvreté », *Savoir/Agir*, vol. 49, no. 3, 2019, pp. 87-93.
- Lahieyte, Lilian. « Sociologie et mesure de la pauvreté. À propos de l'article « Qui se sent pauvre en France ? » », *Revue française de sociologie*, vol. 61, no. 2, 2020, pp. 275-280.

19. Sports de filles, sports de garçons

Sources

- Guérandel, Carine, et Aurélia Mardon. « Introduction. Socialisations de genre durant la jeunesse : la part du sport », *Agora débats/jeunesses*, vol. 90, no. 1, 2022, pp. 58-69.
- Martin, Camille. « Développer le football, moraliser les joueuses. La socialisation de genre des joueuses au coeur de la politique sportive », *Agora débats/jeunesses*, vol. 90, no. 1, 2022, pp. 87-101.

20. Une sociologie de l’enfance est-elle possible ?

Sources

- Sirota Régine, « Positions et dispositions de la sociologie de l’enfance. Retour sur le processus de socialisation », dans *La différenciation sociale des enfants. Enquêter sur et dans les familles,* Sous la direction de Séverine Depoilly, Séverine Kakpo, Presses Universitaires de Vincennes, 2019. (Document 1)
- Geay Bertrand, « Apprendre à percevoir, à penser, à parler et à agir. Sur quelques enjeux épistémologiques de l’étude de la socialisation enfantine précoce », dans *La différenciation sociale des enfants. Enquêter sur et dans les familles*, Sous la direction de Séverine Depoilly, Séverine Kakpo, Presses Universitaires de Vincennes, 2019. (Document 2)

21. Les classes sociales dans l’espace

Sources

- Gobillon, Laurent, Anne Lambert, et Sandra Pellet. « La périurbanisation de la pauvreté : politique de soutien à la propriété et inégalités socio-spatiales en France », *Population*, vol. 77, no. 1, 2022, pp. 7-52.

22. La distinction chez les enfants

Sources

- Laillier Joël et Mennesson Christine, « Usages du temps libre et genèse des inégalités sociales dans la petite enfance », in Octobre, Sylvie et Sirota, Régine, *Inégalités culturelles : retour en enfance*, 2021, pp. 125-145.

Méthodologie :

L’enquête, qui a donné lieu à la publication sous la direction de Bernard Lahire de l’ouvrage *Enfances de classe. De l’inégalité parmi les enfants* (2019), est constituée d’un corpus de 35 enfants de 5-6 ans, issus de familles occupant des positions sociales variées. La population comprend 12 enfants de classes populaires, 11 enfants de classes moyennes et 12 de classes supérieures. Les cas ont été sélectionnés de manière à faire varier le volume global des capitaux parentaux (économique et culturel), la structure de ces capitaux, la nature de l’activité professionnelle des parents et la nature de leur capital scolaire (littéraire/scientifique, etc.).

Ces propriétés sociales, combinées entre elles, sont en effet déterminantes pour étudier les pratiques culturelles et les styles de vie des individus.

23. Femmes de classes populaires

Sources

- Bernard, Lise, et Christophe Giraud. « Avec qui les ouvrières et les employées vivent-elles en couple ? », *Travail, genre et sociétés*, vol. 39, no. 1, 2018, pp. 41-61.
- Masclet, Olivier. « « C’est mon moment. » Le temps pour soi des ouvrières et des employées », *Travail, genre et sociétés*, vol. 39, no. 1, 2018, pp. 101-119.

24. Précarité résidentielle

Sources

- Lion, Gaspard, 2015a, « Saisir l’habiter par ses marges précaires », *Annales de la recherche urbaine*, n°110.
- Lion, Gaspard, 2015b, « Vulnérables, indésirables. Le cas des habitants des bois parisiens », *Métropolitiques*.

Méthode :

Les deux documents s’appuient sur la même enquête de terrain auprès des habitants du Bois de Vincennes.

Allemand

Les textes proposés sont extraits de :

Deutschlandfunk Kultur.de
- “Gedenken in Hanau : Über die Köpfe der Angehörigen hinweg” (27/02/2022)

Profil Online
- “Die Neutralität Österreichs: Das Ende der Bequemlichkeit” (14/03/2022)

Spiegel.de
- “Wider die Unersättlichkeit. Lernen von der DDR” (31/03/2022)

Stern.de
- “Historische Rede: Scholz läutet mit seiner Regierungserklärung eine Zeitenwende ein” (27.02.2022)

Süddeutsche Zeitung Online
- “Filmindustrie und Klimaschutz. Grün ist die Hoffnung” (13/02/2022)

Anglais

Les textes proposés sont extraits de :

The Atlantic
- The Minister of chaos, Boris Johnson knows exactly what he’s doing (July/August 2021 Issue)

BBC News
- Texas passes law banning abortion after six weeks (01/09/2021)
- Drought-stricken US warned of looming 'dead pool' (04/06/2022)
- Clearview AI fined in UK for illegally storing facial images (23/05/2022)

BBC environment analyst
- Climate change: Can the Russian energy crisis help to curb global heating? (11/03/2022)

Business Live
- Brexit exodus – ‘EU workers have left and aren’t returning...we’ve never seen anything like this in 20 years’ (22/07/2021)
- The Great Resignation still dominates the workplace, so why aren’t some employers taking note? (03/06/2022)

CNN
- Supreme Court draft opinion that would overturn Roe v. Wade published by Politico (03/05/2022)

CNN Business
- Why Elon Musk buying Twitter is such a big deal Analysis (26/04/2022)

CNBC
- The UK is threatening to scrap Northern Ireland’s post-Brexit rules — stoking fears of a trade war (16/05/2022)

The Conversation
- Entire home Airbnb listings in London have increased by 571% in 5 years: new research (09/12/2021)
- Shortage of workers threatens UK recovery – here’s why and what to do about it (18/05/2022)
- How a sustainability index can keep Exxon but drop Tesla – and 3 ways to fix ESG ratings to meet investors’ expectations (24/05/2022)

- Replacement theory isn’t new – 3 things to know about how this once-fringe conspiracy has become more mainstream (25/05/2022)
- Government agencies are tapping a facial recognition company to prove you’re you – here’s why that raises concerns about privacy, accuracy and fairness (01/02/2022)

The Evening Standard

- Boris Johnson is in ‘real trouble’ and could face confidence vote next week, says William Hague (01/06/2022)

The Guardian

- Girls overtake boys in A-level and GCSE maths, so are they ‘smarter’? (13/08/2021)
- Goodbye to the age of rage: why Piers Morgan’s outrage journalism is flopping (22/05/2022)
- Congress’s January hearings aim to be TV spectacular that ‘blows the roof off (09/06/2022)
- Biden is sending dangerous messages about Taiwan to China. The US should tread with care (25/05/2022)
- US auctions off oil and gas drilling leases in Gulf of Mexico after climate talks (17/11/2021)
- The NHS wreckers cannot accept that the British public still back it (27/06/2022)
- ‘It’s neocolonialism’: campaign to ban UK imports of hunting trophies condemned African delegation says proposed new law ignores local voices and could harm rather than save wildlife (01/06/2022)

The Independent

- Working mothers forced to quit over flexible arrangements as bosses ‘reject requests too easily’ Maya Oppenheim, Women’s Correspondent (23/04/2022)
- An existential war is raging – and I don’t mean in Ukraine. How the battle plays out over coming weeks will determine whether we pull back from the edge. (06/04/2022)

The London Evening News

- Sadiq Khan promises green ‘new world’ after being appointed city climate ‘king’ at COP26. Mayor applauded by delegates after telling how he refused demands to delay Ulez expansion (02/11/2021)

Manchester Evening News

- Failing our most vulnerable children left a dark shadow over the city -how did Manchester turn it around? (29/05/2022)
- “We’re second class citizens’: Residents rally against student accommodation (31/05/2022)

MAILONLINE

- Prince William is 'frustrated' BBC is helping The Crown makers Netflix 'commercialise' infamous Martin Bashir interview after scene was shot at New Broadcasting House (01/12/2021)

The New York Times

- Buy GameStop, Fight Injustice. Just Don’t Sell. (29/01/2022)
- BIPOC or POC? Equity or Equality? The Debate Over Language on the Left. (01/11/2021)
- U.S. Is ‘Considering’ Diplomatic Boycott of Beijing Olympics, Biden Says (18/11/2021)
- Biden’s Child Care Plan Faces Resistance From Religious Groups (14/11/2021)
- Sinema Rejects Changing Filibuster, Dealing Biden a Setback (13/01/2022)

NPR News

- The Supreme Court ponders the right to pray on the 50-yard line (25/04/2022)
- More than 1 million fewer students are in college. Here's how that impacts the economy (13/01/2022)

Newsweek Opinion

- You Can't Fix the Housing Crisis With Houses. We Need New Cities (24/02/2022)
- California Is Calling for Reparations for Slavery. Why Isn't Biden? (03/06/2022)

Newsweek

- Prince Charles Says 'Time Has Come' for Commonwealth Slavery Conversations (06/24/22)

The National

Scotland in new era of 'Westminster override', says top academic Dr Aileen McHarg (23/05/2022)

Politico

- Arbery killers get life in prison; no parole for father, son (01/07/2022)
- U.S. deploys troops to Eastern Europe; thousands more on standby (02/02/2022)

The Scientist

- Destroy All Samples of the Smallpox Virus : With a global alarm ringing because of an unprecedented outbreak of monkeypox, we should also consider a different but closely related viral threat. (01/06/2022)

TechTarget

- CHIPS Act moves the needle on US chip manufacturing (28/03/2022)

USA Today

- Trump said lay down your life to stop critical race theory. But what about…Oxford commas? (18/03/2022)

Vanity Fair

- Florida Advances Bill That Would Ban Making White People Feel Bad About Racism, and No, That's Not a Joke (21/01/2022)

Xtra

- U.K. Supreme Court rejects appeal for gender-neutral 'X' marker on passports (23/12/2021)

The Yale Daily News

- Don't mess with Texas (10/12/2021)

Japonais

Le texte proposé est extrait de :

1/
Article : 小泉浩樹『東京23区から離れる人が増加』（朝日中高新聞　2022年3月20日）

Espagnol

Les textes proposés sont extraits de :

El País

- "¿Por qué votan las mujeres a la extrema derecha? " (04/05/2022)
- "El experimento fallido de Vox en El Ejido " (07/06/2022)
- "La politización de la monarquía " (23/05/2022)
- "El candidato rupturista y el político más tradicional se disputan la presidencia de Costa Rica " (03/04/2022)

Pagina/12

- "El presidente de México no va a la Cumbre de las Américas y criticó el "intervencionismo" de Estados Unidos" (06/06/2022)
- " Censura a la prensa y mano dura en El Salvador " (17/04/2022)

Arabe

Le texte proposé est extrait de :

واقع المرأة العربية
موقع قنطرة
نوفمبر 2019

Italien

Le texte proposé est extrait de :

Il Fatto quotidiano

- “C’è un limite allo sviluppo ? Uno studio 50 anni fa affrontava il tema, ora possiamo andare oltre” (24/04/2022)

Géographie

Commentaire de la carte Nice / Menton au 1/25 000^{e}
Document d'accompagnement : photographie aérienne de 1955, ciblant le sud-ouest de la commune de Nice à proximité de l'embouchure du Var (source : https://www.geoportail.gouv.fr)

Commentaire de la carte de Morez-Les Rousses au 1/25 000^{e}
Document d'accompagnement : Carte des entreprises en lien avec l'industrie lunetière sur le département du Jura (Antoine Grandclément, 2009, « District industriel et identité des entreprises » in Espace Géographique)

Commentaire de la carte de Pont l'Abbé – Pointe de Penmarc'h au 1/25 000^{e}
Document d'accompagnement : Extrait du site Internet de la commune du Guilvinec consulté en 2022 (Source : https://www.leguilvinec.com/port-de-peche-de-plaisance_fr.html)

Commentaire de la carte de Bagnères de Luchon au 1/25 000^{e}
Document d'accompagnement : Activités touristiques et changement climatique (sources : « La Dépèche », 2018 et site internet du Parc National des Pyrénées)

Histoire contemporaine

L'armée en France (1870-1914)
Les « années folles » dans le monde
Le terrorisme dans le monde au XXe siècle

La IVe République
Les conséquences économiques de la Seconde Guerre mondiale
Les contre-cultures aux Etats-Unis

Les intellectuels en France
La guerre d'Espagne
1945 dans le monde

La France coloniale (1870-1962)
Régimes autoritaires, régimes totalitaires (1919-1945)
La guerre en Asie (1937-1945)

La désindustrialisation en France
Le mur de Berlin
L'anticolonialisme dans le monde

L'exception culturelle française
Le Royaume-Uni, l'Europe et les Etats-Unis depuis 1945
La décolonisation en Afrique

Propagande et communication politique en France depuis 1945
La Chine de Mao à Deng
Les féminismes en France

Résistances et résistants en France (1940-1945)
La crise de 1929
Le Pacifique

Les étrangers en France
La déstalinisation
Les ligues en France dans l'entre-deux-guerres

Religions et politique en France
1968 dans le monde
Les médias de masse en France après 1945

Le travail en France (1870-1945)
Europe et Afrique depuis 1945
Les Balkans

Automobile et société en France
Les origines de la Guerre froide
Les jeux olympiques au XXe siècle

L'État-providence en France
« L'esprit de Genève » et la SDN
Les pacifismes en France

Paris
Les nationalismes au Moyen Orient
Ancrer la République (1870-1914)

Les femmes et le travail en France
Les sociétés de consommation depuis 1945
Cultures de guerre en France (1914-1918)

Les expositions universelles en France
L'URSS et l'Europe
Le Front populaire

Le syndicalisme en France
La Révolution des œillets
La France mondialisée (1945-1991)

La planification en France (1945-1992)
Tiers-monde et tiers-mondisme dans le monde
La guerre d'Algérie

La presse en France (1870-1945)
États et mondialisations
L'école unique en France au XXe siècle

Monde rural et transformations de la société française au XXe siècle
La Papauté
Le communisme international

Mathématiques

Voir Annexe :

Épreuve orale de mathématiques 2022, concours d’entrée à l’ENS de Lyon,
Série Sciences économiques et sociales

Sujet 1 - 2022

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. **Question préliminaire :**

   Montrer que si φ est une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$ et si $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\ dx$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} \varphi(x)\ dx$$

On considère une variable aléatoire X qui suit la normale centrée réduite.
On pose $Y = |X|$.

2. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, Y admet un moment d'ordre n et que :

$$E(Y^n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx$$

Dans toute la suite, on note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx$

4. (a) Justifier que I_0 converge et calculer sa valeur.
   (b) Calculer I_1.
   (c) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
   (d) En déduire, pour tout k dans $\mathbb{N}$, la valeur de I_{2k+1} et celle de I_{2k} en fonction de k.

5. (a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2/2}\ dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-nx^2/2}\ dx$$

   (b) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}}I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\ dx$$

   (c) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \sqrt{n}I_n \leq I_{n+1}$$

6. (a) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, déterminer l'expression de $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ en fonction de n.

(b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{1-\frac{1}{2n}} \leq \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}\binom{2n}{n} \leq 1$$

et en déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{Ker}(u^j) = \mathrm{Ker}(u^{j+1})\}$ est non vide et qu'il est minoré. On admettra qu'il possède par conséquent un plus petit élément.

Dans la suite de l'exercice, on pose :
$k = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{Ker}(u^j) = \mathrm{Ker}(u^{j+1})\}$,
$K = \mathrm{Ker}(u^k)$,
$I = \mathrm{Im}(u^k)$.

2. Montrer que pour tout $j \geq k$, $\mathrm{Ker}(u^j) = K$ et $\mathrm{Im}(u^j) = I$.

3. Montrer que l'application u_K définie par :

$$\forall x \in K,\ u_K(x) = u(x)$$

est un endomorphisme de K et qu'il existe un entier naturel p tel que u_K^p est l'endomorphisme nul.

4. Montrer que l'application u_I définie par :

$$\forall x \in I,\ u_I(x) = u(x)$$

est un automorphisme de I.

5. Montrer que K et I sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Résultats préliminaires

   (a) Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit a un réel.
   Montrer que si $\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge alors $\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

   (b) Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a un réel.
   Montrer que si $\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge alors la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ de dérivée $x \mapsto -\varphi(x)$.

   (c) Soit φ une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F. On suppose que :

$$\forall x < 0,\ f(x) = 0 \text{ et } f \text{ continue sur } [0; +\infty[.$$

2. On suppose pour cette question que la variable X admet une espérance.

   (a) Montrer que pour $x > 0$:

   $$0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt$$

   En déduire que :

   $$\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f(t)dt\right) dx$ converge et vaut $E(X)$.

   (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right) dx$ converge et calculer sa valeur.

3. Réciproquement, on suppose désormais que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f(t)dt\right) dx$ converge.

   (a) Soit a un réel positif, démontrer que :

   $$0 \leq \int_0^a xf(x)dx \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx$$

   (b) En déduire que X a une espérance.

Exercice 2.
On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$ et de son produit scalaire canonique.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe un couple de réels (a,b) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = ax_n + b.$$

On considère deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes respectifs u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + 2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}v_n + 1.$$

1. Soit (α, β) un couple de réels et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.
   Montrer que, pour que la suite w soit un élément de $\mathcal{E}$, il suffit que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de la matrice :
   $$M = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (C_1, C_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propre pour M.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

3. On considère les suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :
   $$\begin{pmatrix} z_n \\ t_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
   Exprimer z_n et t_n en fonction de n, u_0 et v_0.

4. Déterminer finalement une expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation :

$$(E_n) \qquad 1+\ln(x+n)=x$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que, pour n assez grand, $\ln(n) \leq a_n \leq n$.
   En déduire le comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que $a_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Déterminer un équivalent simple de e^{a_n} lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que la suite $(a_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1}(a_n-\ln(n)-\ell)$?

Exercice 2.
On admet que si x est un réel de $]-1;1[$, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui donne "pile" avec probabilité p (on suppose que $p\in]0;1[$).
Un compteur affiche à l'issue de chaque lancer la différence entre le nombre de "pile" et le nombre de "face" obtenus depuis le premier lancer. Ainsi, si les premiers lancers donnent "PFFPP", le compteur affichera 1 à l'issue de ces lancers. Si les premiers lancers donnent "FPFFF", le compteur affichera -3 à l'issue de ces lancers.

Un entier naturel non nul n étant fixé, on note C_n la variable aléatoire égale à l'entier relatif affiché par le compteur à l'issue du n-ième lancer.

1. Déterminer $P([C_n=0])$. *On pourra distinguer deux cas selon la parité de n.*

Pour tout entier naturel non nul k, on note A_k l'événement "le compteur affiche 0 pour la première fois à l'issue du k-ième lancer".

2. (a) Justifier que : $[C_n=0]\subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(C_n=0)=\sum_{k=1}^{n}P([C_n=0]\cap A_k)$$
3. (a) Justifier que, pour tous entiers naturels k et n : $P_{A_k}(C_n=0)=\begin{cases}P(C_{n-k}=0) & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(C_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(C_{n-k} = 0) \times P(A_k)$$

(c) On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0 \ \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = P(C_n = 0) \text{ et } v_n = P(A_n)$$

i. Montrer que si $x \in]-1,1[$, la série de terme général $v_n x^n$ converge. On note $V(x)$ sa somme.

ii. Montrer en utilisant le résultat admis au début de l'énoncé que pour tout $x \in]-1;1[$, la série de terme général $u_n x^n$ converge et que si on note $U(x)$ sa somme, on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}$$

iii. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} u_{n-k} v_k$$

iv. En déduire que pour tout x de $]-1;1[$,

$$U(x) = 1 + U(x)V(x)$$

v. Donner, en fonction de p et de x, une expression de $V(x)$ sur $]-1;1[$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que la suite (R_n) est décroissante, convergente et déterminer sa limite.
2. Pour n entier naturel, justifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=0}^{n} k u_k.$$
En déduire que si la série $\sum_{n\geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} n u_n$ converge.
3. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} n u_n$ converge.
   (a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} (n+1)R_n$?
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} R_n$ converge.
4. Application : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note F sa fonction de répartition.
   (a) Justifier que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-F(n))$ est convergente et que, si elle existe, l'espérance de X est la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-F(n))$.
   (b) En déduire une démonstration pour la formule de l'espérance d'une loi géométrique.

Exercice 2.
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.
Les matrices considérées sont à coefficients dans $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des réels ou l'ensemble des complexes.
Pour M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^tM$ la transposée de la matrice M.

1. Question préliminaire
Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres distinctes notées λ_1, λ_2,..., λ_n.
On appelle alors D la matrice diagonales dont les coefficients diagonaux sont les λ_i avec i entier entre 1 et n.

2. Rappeler pourquoi A est diagonalisable et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

3. Soit P une matrice inversible.
   Montrer que l'égalité $AP = PD$ équivaut au fait que pour chaque entier j entre 1 et n, la j-ème colonne de P est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_j.

4. Dans toute la suite, on note P une matrice dont la j-ème colonne est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_j pour chaque entier j entre 1 et n. La matrice Q jouera le même rôle avec les mêmes valeurs propres de ${}^tA$. Pour i et j deux entiers entre 1 et n, on notera respectivement p_{ij} et q_{ij} le coefficient se trouvant à la ligne i et la colonne j dans la matrice P et la matrice Q.

   (a) Justifier que : ${}^tQA = D{}^tQ$.
   En déduire que : $A({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}D$.

   (b) Justifier alors l'existence d'une matrice diagonale inversible Δ qui vérifie :

   $$({}^tQ)^{-1} = P\Delta.$$

   (c) On note δ_1, δ_2,..., δ_n les coefficients diagonaux de Δ. Montrer qu'ils sont déterminés par la relation :

   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{ki} q_{ki} = 1$$

5. Application : Montrer que si les valeurs propres de A sont toutes non nulles, alors A est inversible et pour tous les entiers i et j entre 1 et n, le terme qui se situe à la i-ème ligne et j-ème colonne de A^{-1} est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_k \frac{p_{ik} q_{jk}}{\lambda_k}$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes la loi uniforme discrète sur $\{-1;1\}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Pour un réel t et un entier k donnés, montrer que la variable e^{tX_k} admet une espérance et la calculer.
   Dans la suite, on note $\varphi(t) = E(e^{tX_k})$.
   (b) Montrer que pour tout réel t, $\varphi(t) \leq e^{t^2/2}$.
   Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - \ln(\varphi(t))$
2. (a) Pour tout réel t, montrer que $E(e^{tS_n}) = (\varphi(t))^n$.
   (b) Pour tout réel t, déterminer
   $$\lim_{n\to+\infty} E(e^{tS_n/\sqrt{n}})$$
3. Soit a un réel positif.
   (a) Montrer que, pour tout réel positif t :
   $$P(S_n \geq a) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{ta}}$$
   (b) À l'aide des questions précédentes, en déduire que :
   $$P(S_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n}$$
   (c) Montrer que $P(S_n \leq -a) = P(S_n \geq a)$ puis déterminer une majoration de $P(|S_n| \geq a)$.

Exercice 2.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel que l'on note $\langle\ ,\ \rangle$. La norme associée est notée $\|\ .\ \|$.
Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme égale à 1.
Pour tout réel a, on définit l'application f_a par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. Soient a et b deux réels.
   (a) Déterminer c tel que $f_a \circ f_b = f_c$
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'application f_a est-elle bijective ? Expliciter alors sa bijection réciproque.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'application f_a est-elle une symétrie ? Préciser alors son axe et sa direction.

(d) Pour quelle(s) valeur(s) de a, l'application f_a est-elle une projection ? Préciser alors les deux sous-espaces F et G tels que f_a soit une projection sur F de direction G.

3. L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

4. Dans cette question, on pose $a = -2$ et on ne suppose plus le vecteur u fixé.
On note s_u l'application f_{-2} définie précédemment. On a donc, pour tout u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$:
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; s_u(x) = x - 2\langle x, u\rangle u$$
On note g un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante : la matrice de g^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la transposée de la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(a) Vérifier que $\|g(u)\| = 1$.

(b) Montrer que : $g \circ s_u \circ g^{-1} = s_{g(u)}$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de densité f et de fonction de répartition F, on appelle taux de défaillance de X la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1-F(x)} & \text{si } F(x) < 1 \\ 0 & \text{si } F(x) = 1 \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question uniquement que X suit la loi uniforme sur $]a, b[$ où a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. Déterminer le taux de défaillance de X.

2. On suppose dans cette question uniquement que X suit la loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. Déterminer le taux de défaillance de X.

3. On revient au cas général. On considère un réel t vérifiant $F(t) < 1$.
   Exprimer $\displaystyle\int_0^t h(x)\,dx$ en fonction de $F(t)$.

4. Déterminer les lois pour lesquelles le taux de défaillance est constant.

Exercice 2.

Dans cet exercice on se place dans un espace vectoriel E de dimension finie n où n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère alors u et v deux endomorphismes de E diagonalisables.

1. Démontrer que s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices associées à u et v sont diagonales, alors on a $u \circ v = v \circ u$ (on dit que u et v commutent).

2. Supposons désormais que $u \circ v = v \circ u$.

   (a) Dans cette question on se place dans le cas particulier $n = 2$.
   Justifier qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices associées à u et à v sont diagonales (on pourra procéder par disjonction de cas en fonction du nombre de valeurs propres distinctes de u).

   (b) On revient au cas général où n est un entier naturel non nul.

      i. Démontrer que si u possède une seule valeur propre alors il existe une base de E dans laquelle les matrices associées à u et à v sont diagonales.

      ii. Soit F un sous-espace propre de u.
      Montrer que : $\forall x \in F,\ v(x) \in F$.
      On considère alors $\widetilde{v}$ l'endomorphisme de F induit par v : $\widetilde{v}$ est donc l'endomorphisme de F tel que pour tout $x \in F$, $\widetilde{v}(x) = v(x)$.
      On définit de même $\widetilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.
      Justifier que $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ commutent.

      iii. À l'aide d'une démonstration par récurrence, démontrer alors que, si u et v commutent, il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont diagonales.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on appelle Y_n la variable aléatoire définie par : $Y_n = (\sin(X))^{2n}$.

1. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, Y_n admet une espérance que l'on notera J_n.
   (b) Calculer J_0.

La suite de cet exercice a pour objectif de déterminer de deux façons différentes la limite de la suite $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Première méthode.
   (a) i. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que :
   $$J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}$$
   ii. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que cette suite est convergente.
   (b) i. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$.
   ii. En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Seconde méthode.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq J_n \leq \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} (\sin(x))^{2n}\ dx$$
   (b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(Y_n > \varepsilon) = 0$$

Exercice 2.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. **Question préliminaire**
   Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose $r_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
   Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

(a) Montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leq r_i \times \max_{1\leq k\leq n}(|x_k|)$$

(b) En déduire qu'il existe i dans $[\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda| \leq r_i$.

3. Soit $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ dans $\mathbb{C}^n$.

On définit le polynôme P par : $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ et la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ -c_{j-1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que les valeurs propres de M sont les racines du polynôme P.

(b) On pose $R = \max(|c_0|, 1+|c_1|, 1+|c_2|, \ldots, 1+|c_{n-1}|)$.
Déduire des questions précédentes que toutes les racines de P ont un module inférieur ou égal à R.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f et g deux projecteurs de E. On note id_E l'application identité de E.
Les questions 2. et 3. sont indépendantes l'une de l'autre.

1. (a) Démontrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
2. (a) Démontrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ si et seulement si $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient la même image.
3. On suppose dans cette question que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Démontrer que $f \circ g$ est un projecteur.
   (b) Démontrer que :
   $$E = (\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g) \oplus (\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g) \oplus (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} g) \oplus (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker} g)$$
   En déduire l'image et la direction de $f \circ g$.

Exercice 2.
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé.
On considère T une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0;1[$ et on définit alors la variable U par la relation $U = 1 - T$.
On pose alors : $X = \min(T, U)$, $Y = \max(T, U)$, $M = XY$ et $S = Y - X$.

1. Rappeler la fonction de répartition F_T de T. On en donnera une expression et l'allure de la représentation graphique.
   Rappeler les valeurs respectives de l'espérance et de la variance de T.
2. Déterminer la fonction de répartition de U.
3. (a) Donner une expression de M en fonction de T uniquement.
   (b) En déduire que M admet une espérance et donner sa valeur.
   (c) Donner la représentation graphique de la fonction $t \mapsto t(1-t)$ pour $t \in [0;1]$.
   (d) Montrer alors que la fonction de répartition F_M de M vérifie :
   $$\forall x \in]0; 1/4[, \quad F_M(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$$
   (e) M admet-elle une variance ? Si oui, donner sa valeur. (On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{1-4x}$).
4. (a) Justifier que $S = |2T - 1|$.
   (b) Déterminer alors la probabilité de l'événement $[M > S]$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Soit f un endomorphisme de E_1 et g un isomorphisme de E_1 sur E_2.
À tout vecteur x de E que l'on peut écrire $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on associe :

$$\varphi(x) = g^{-1}(x_2) + g(x_1) + f(x_1)$$

1. Justifier que dim E_1=dim E_2. Que peut-on en déduire sur n ?
2. Montrer que φ est un automorphisme de E.
3. (a) On suppose que φ admet une valeur propre réelle λ et on note x un vecteur propre associé. On écrit de nouveau x sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
   Montrer qu'alors x_1 et x_2 sont non nuls et que x_1 est un vecteur propre de f.

   (b) Réciproquement, on suppose que f admet une valeur propre réelle μ et on note x_1 un vecteur propre associé.
   Montrer que φ admet au moins deux valeurs propres réelles λ et λ' et déterminer en fonction de x_1 un vecteur propre de φ associé à chacune de ces deux valeurs propres.

Exercice 2.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes entre elles. Elles utilisent le résultat démontré dans la question 1.

Dans la suite, on admettra le résultat suivant :
Si $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite de réels positifs ou nuls, suite à deux indices vérifiant :

(i) pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,k}$ converge. On note S_k sa somme.

(ii) la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} S_k$ converge.

Alors on peut permuter les deux signes $\sum$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

1. Soient X et N des variables aléatoires discrètes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même univers Ω que l'on supposera muni d'une probabilité P.
   On convient de noter $N(\Omega)$ l'ensemble des entiers n de $\mathbb{N}$ tels que $P(N = n) \neq 0$.
   On admet que X possède une espérance.

   (a) Montrer que pour tout n de $N(\Omega)$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} kP(X = k|N = n)$ est convergente. On notera $E_n(X)$ sa somme.

   (b) Montrer que :

$$E(X) = \sum_{n\in N(\Omega)} E_n(X)P(N = n)$$

2. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui donne "pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "face" avec la probabilité $1-p$.
   On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir "pile" pour la première fois.
   Si "pile" apparaît pour la première fois au n-ième tirage, on effectue n lancers de la même pièce et on appelle X le nombre de "pile" obtenus lors de cette seconde série de lancers.
   On admet que X possède une espérance. La déterminer.

3. Un joueur paie une certaine somme r pour pouvoir jouer à un jeu qui consiste à lancer plusieurs fois un dé :

   - s'il obtient un 6, l'organisateur du jeu lui donne 6 euros et le jeu continue,
   - s'il obtient un 5, l'organisateur du jeu lui donne 5 euros et le jeu continue,
   - s'il obtient un chiffre différent de 5 et 6, il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

   On note N le nombre de lancers effectués avant d'obtenir un chiffre différent de 5 et 6 et S la somme gagnée.
   On admet que S possède une espérance.

   (a) Déterminer la loi de N. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

   (b) Montrer que pour tous n et k de $\mathbb{N}$,

   $$P_{[N=n]}(S=k) = \begin{cases} \dfrac{\dbinom{n}{6n-k}}{2^n} & \text{si } 5n \leq k \leq 6n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (c) Quelle doit être la valeur de r pour qu'en moyenne l'organisateur du jeu ne soit pas perdant ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On dispose d'une infinité de sacs numérotés par les entiers naturels de sorte que pour chaque entier naturel i, le sac numéroté i contient $i+1$ jetons eux-mêmes numérotés de 0 à i.
On choisit un sac puis on pioche au hasard un jeton dans le sac (ce tirage se fait dans des conditions d'équiprobabilité).
On note Ω l'univers de cette expérience.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du sac choisi et, pour chaque entier naturel i, on note p_i la probabilité de l'événement $[N = i]$.
On note X la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu.

1. (a) Quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs possibles pour X ?
   (b) Pour chaque valeur j dans $X(\Omega)$, donner une expression de $P(X = j)$ sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_i.
   (c) Montrer que $N - X$ suit la même loi que X.
2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 qui vérifie :

$$\forall i \geq n+1, \quad p_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \leq n, \quad p_i > 0.$$

   (a) Trouver une relation entre $E(N)$ et $E(X)$.
   (b) Trouver une relation entre $V(N)$ et $\mathrm{Cov}(N, X)$.
   (On pourra utiliser l'égalité : $V(N - X) = V(N) + V(X) - 2\mathrm{Cov}(N, X)$.)
   (c) Calculer $\mathrm{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère a un réel fixé pour l'ensemble de l'exercice. On définit l'application Φ qui, à toute fonction f élément de E, associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-a} \displaystyle\int_x^{2x-a} f(t)dt & \text{si} \quad x \neq a \\ f(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit f un élément de E.
   Justifier que $\Phi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que Φ est un endomorphisme de E.
2. Soit f un élément de E, justifier que $\Phi(f)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
3. Soit f un élément du noyau de Φ.
   (a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2f(2x - a)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{(2^n - 1)a + x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$.
   (c) Montrer enfin que f est la fonction nulle.

4. Φ est-il surjectif ? injectif ?

5. (a) Pour k entier naturel, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x-a)^k$$

Déterminer l'image par Φ de chaque fonction f_k.

(b) En déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \Phi(P)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) φ est-il surjectif ? injectif ? diagonalisable ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que si tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de u, alors u admet une seule valeur propre.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^n$ dont la trace est nulle.
Sous ces conditions, on peut alors démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a une diagonale constituée de coefficients nuls.
L'objet des questions qui suivent est de montrer ce résultat dans certains cas particuliers.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
   Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   où a désigne un réel.

3. On suppose dans cette question que $n = 3$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A définie par :
   $$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ -4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$
   On appelle x le vecteur $(1, 1, 0)$.
   Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est x et dans laquelle la matrice de f est la matrice B définie par :
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et l'unicité d'un minimum pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f \ : \ (a, b) \mapsto E\left((X - aY - bZ)^2\right)$$
où X, Y, Z désignent trois variables aléatoires à densité admettant des moments d'ordre 2.

1. Dans cette question et la suivante, on suppose que $E(Y^2)E(Z^2) - (E(YZ))^2 \neq 0$.
   (a) Montrer que $E(Y^2)$ est non nulle.
   (b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, $E\left((aY + bZ)^2\right)$ est un réel strictement positif.

2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'il existe un unique couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $\frac{\partial f}{\partial a}(a_0, b_0) = \frac{\partial f}{\partial b}(a_0, b_0) = 0$ où $\frac{\partial f}{\partial a}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.

   (b) Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E\left((X - a_0 Y - b_0 Z)(aY + bZ)\right) = 0$$

   puis que

$$E\left((X - aY - bZ)^2\right) = E\left((X - a_0 Y - b_0 Z)^2\right) + E\left(((a_0 - a)Y + (b_0 - b)Z)^2\right)$$

   (c) Étudier les extremums de f.

3. On suppose ici que Y et Z sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, qui suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on pose $X = Y^2$.
Déterminer le couple (a_0, b_0) en lequel f admet son minimum.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Soit T l'application qui, à tout élément P de E associe la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = xP(x) - \frac{1}{n}(x^2-1)P'(x).$$

1. Justifier que T est un endomorphisme de E.
2. Soit P un élément de E, vecteur propre de T.
   (a) Montrer que P est de degré n.
   (b) Démontrer que les seules racines possibles pour P sont -1 et 1.
   (c) En déduire que P est de la forme : $x \mapsto a(x-1)^k(x+1)^{n-k}$ où a est un réel non nul et k un entier entre 0 et n.
3. Déterminer les valeurs propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 2.
Soit n un entier naturel non nul. On considère n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.
On définit alors la variable Y_n par : $Y_n = \text{Max}(X_1, ..., X_n)$.

1. (a) Justifier que, pour x réel positif, $P(Y_n \leq x) = (1-e^{-x})^n$.
   (b) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité (on la notera f_n dans la suite).
2. (a) Démontrer que Y_n a une espérance et démontrer que :

$$E(Y_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j \binom{n}{j+1}}{j+1}$$

   (b) Vérifier que, pour j et k deux entiers entre 1 et $n-1$ vérifiant $j \leq k-1$, on a :

$$k\binom{k}{j} = j\binom{k}{j} + k\binom{k-1}{j}$$

   (c) Pour k entier naturel non nul, on pose : $u_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k}{j+1}}{j+1}$.
   Démontrer que pour k supérieur à 2, on a : $u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{k}$.
   En déduire que $E(Y_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

3. (a) Pour k entier naturel non nul, on pose : $v_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k}{j+1}}{(j+1)^2}$.

   Démontrer que pour k supérieur à 2, on a : $v_k - v_{k-1} = \frac{1}{k} u_k$.

   (b) Montrer que Y_n a un moment d'ordre 2 et que $E(Y_n^2) = 2v_n$.

   (c) Montrer enfin que Y_n a une variance et que $V(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   On pourra remarquer que : pour $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j - \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique que l'on note $\langle , \rangle$.
On rappelle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, y\rangle = {}^tXY$$

où X et Y sont les colonnes contenant les coordonnées respectives de x et de y dans la base canonique de E.
Soit f un endomorphisme de E, on note M sa matrice dans la base canonique de E.
On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est ${}^tM$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f^* \circ f) = (\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$.
   (c) Démontrer alors que si $f \circ f^* \circ f = f$ alors $f^* \circ f$ est une projection orthogonale.
2. (a) Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f^*))^{\perp}$.
   (b) En déduire que si $f^* \circ f$ est une projection orthogonale, alors $f \circ f^* \circ f = f$.

Exercice 2.

1. <u>Préliminaire</u>
   (a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = x\ln(x), \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad h(0) = 0$$
   Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$. Illustrer cette propriété par un graphique.

Pour X une variable aléatoire à densité de densité φ, on dit que X possède une entropie lorsque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))dx$ est absolument convergente. On appelle alors entropie de X la quantité $H(X)$ définie par : $H(X) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))dx$.

2. On considère dans cette question une variable X suivant la loi normale d'espérance m et de variance σ^2 ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).
   Montrer que X possède une entropie et que $H(X) = \dfrac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.
   On rappelle qu'une densité de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.
3. Soit Y une variable aléatoire à densité, de densité f continue sur $\mathbb{R}$, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose de plus que Y admet une entropie.
   (a) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(\varphi(x))dx$ et vérifier que $H(X) = -I$.

(b) En utilisant la première question de l'exercice, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -h(f(x)) + f(x)\ln(\varphi(x)) \leq \varphi(x) - f(x).$$

(c) En déduire que $H(Y) \leq H(X)$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$$

et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant $u_0 \in]1; 2[$.
   On pourra tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à (D).
2. On note f_1 la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
   (a) Montrer que f_1 définit une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   (b) Donner une expression de g, la bijection réciproque de f_1.
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 0 \ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = g(v_n).$$

   Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
4. Montrer que l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramène au cas où $u_0 \in [0; 1]$.
5. En discutant selon les valeurs de u_0, déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.
Soient X, Y, et Z trois variables aléatoires, indépendantes et qui suivent toutes la loi binomiale de paramètres n et p.
On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à 1.
2. (a) Donner une expression de A^2 en fonction de A.
   (b) Quelle est la probabilité que A soit la matrice d'un projecteur ?
   (c) Quelle est probabilité qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$?
3. On note T la variable aléatoire égale au nombre de valeurs propres de A.
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance et T.

(b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

4. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.
On pourra admettre les propriétés suivantes :
• si B, C et D sont des événements,

$$P(B \cup C \cup D) = P(B) + P(C) + P(D) - P(B \cap C) - P(C \cap D) - P(B \cap D) + P(B \cap C \cap D).$$

• Pour tous entiers naturels m, n_1 et n_2 tels que $m \leq n_1 + n_2$,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{m-k} = \binom{n_1 + n_2}{m}$$

Quelle est la probabilité qu'au moins une des colonnes de A soit égale à la somme des deux autres colonnes ?