Série sciences économiques et sociales

Session 2021

Économie

Dossiers:

Sujet 1 : Quelles sont les mesures que peuvent prendre les autorités monétaires pour lutter contre la crise ?
Document 1: C. Blot et P. Hubert, Blog OFCE, 13 novembre 2020 : Que peuvent encore faire les banques centrales face à la crise ?
Document 2 : OFCE Policy Brief, N°80, 9 novembre 2020 : Part de la dette publique détenue par la banque centrale

Sujet 2 : La monnaie est-elle un bien commun ?
Aucun document

Sujet 3 : Quelles politiques pour lutter contre le chômage ?
Document 1 : « Chômage des jeunes : de l'effet Tanguy à l'effet Jamel »
Document 2 : Source : J.-B. Eymoud et E._Wasmer, The Conversation, 8 décembre 2015

Sujet 4 : Comment conduire une politique budgétaire efficace ?
Document 1: « Comment les monnaies locales réhabilitent le multiplicateur keynésien »: M. Bonneau, The Conversation France, 14 février 2019

Sujet 5 : Quels sont les outils de la politique monétaire ?
Document 1 : La communication des banques centrales peine encore à influencer les acteurs économiques. C. Cornand, K. Boun My, The Conversation, 17 janvier 2021

Sujet 6 : Les gouvernements doivent-ils rembourser leur dette ?
Aucun document

Sujet 7 : Faut-il limiter l'endettement ?
Document 1 : Le commerce du miel et des abeilles, entre fables et réalités. F. Levêque, The Conversation, 4 février 2021

Sujet 8 : Le prix des biens reflète-il toujours les préférences des consommateurs ?
Document 1 : Acheter des vins trop âgés : une question de goût (du risque). J.-C. Tisserand, N. Georgantzis, The Conversation, 13 janvier 2021.

Sujet 9 : La création d'un marché additionnel est-elle l'unique solution à la gestion des externalités ?
Document 1: Les critères du volet correctif du pacte de stabilité et de croissance. Ministère de l'action et des comptes publics

Sujet 10 : L'État doit-il soutenir la demande privée ou doit-il privilégier la demande publique ?
Aucun document

Sujet 11 : Quelles politiques pour combattre les discriminations ?
Aucun document

Sujet 12 : Pourquoi et comment redistribuer ?
Aucun document

Sujet 13 : Transferts sociaux et chômage.
Aucun document

Sujet 14 : Doit-on encourager l'épargne ?
Document 1 : Taux d'épargne et taux d'épargne financière dans 6 pays, du 4ème trimestre 2008 au 3ème trimestre 2020. STAT INFO- février 2021, Banque de France

Sujet 15 : L'immigration représente-t-elle une menace pour les salaires et l'emploi ?
Document 1 : Taux de chômage et immigration en France, de 1995 à 2017. INED, Ministère de l'Intérieur, Eurostat, INSEE
Document 2 : L'immigration représente-t-elle une menace pour les salaires et l'emploi ? A. Edo, The Conversation France, 18 mars 2019

Sujet 16 : Une relance par la politique monétaire est-elle toujours efficace ?
Aucun document

Sujet 17 : Faut-il encourager les entreprises de grande taille ?
Document 1 : Chiffre d'affaires de différents types d'entreprises. « Les entreprises de taille intermédiaires », Direction Générale de la Compétitivité de l'Industrie et des Services, mai 2010.
Document 2 : Performances selon la catégorie d'entreprise : valeur ajoutée moyenne et exportations moyennes par salarié. «Les entreprises de taille intermédiaires », Direction Générale de la Compétitivité de l'Industrie et des Services, mai 2010

Sujet 18 : Le taux d'intérêt est-il le prix du renoncement à une consommation présente ?
Document 1 : La faiblesse du taux d'intérêt exprime-t-elle un nouveau rapport du consommateur au futur ? M. Jaeger, The Conversation, 15 juillet 2019.
Document 2 : Taux d'intérêt en France, 1800-2015. V. Levy-Garboua, E. Monnet, « Les taux d'intérêt en France : une perspective historique », 2016.

Sujet 19 : La concurrence entre entreprises bénéficie-t-elle à l'emploi ?
Document 1 : Taux d'emploi dans le secteur privé (hors agriculture) et indice de régulation sur le marché des biens et services, 1998, OCDE. « And the Twain Shall Meet : Cross-market Effects of Labour and Product Market Policies », in OECD Employment Outlook 2002, Editions OCDE, Paris.
Document 2 : « Le glacier Froneri ferme son usine de Beauvais et renforce celle de Plouédern ». L'Usine Nouvelle, 11 octobre 2018.

Sujet 20 : Faut-il privatiser les infrastructures publiques ?
Document 1 : Aéroports de Paris : « Au secours Yvonne, ils vendent les bijoux de famille ! ». J. Caby, The Conversation, France, 29 avril 2018.

Sujet 21 : Pourquoi et comment évaluer les politiques publiques ?
Aucun document

Sujet 22 : Comment financer les biens publics ?
Aucun document

Sujet 23 : Qu'est-ce qui fonde la valeur d'une monnaie ?
Document 1 : « Le bimétallisme ». P. Schaefer, www.universalis-edu.com
Document 2 : Présentation du Bitcoin. Wikipedia
Document 3 : Cours du Bitcoin en Euro, du 3 juin 2016 au 26 mai 2021. Google Finance

Sujet 24 : La santé est-elle un bien comme les autres ?
Aucun document

Sujet 25 : Dette publique et richesse nationale.
Document 1 : Pourquoi la dette publique effraie-t-elle autant ? B. Massenot, The Conversation, 25 avril 2021
Document 2 : Budget de l'État voté en quelques chiffres. Direction du budget, 24 février 2020

Sociologie

<u>Dossiers</u> :

1- 50 ans de pratiques culturelles en France

<u>Sources</u> :

- Lombarde Philippe, Wolff Loup, « Cinquante ans de pratiques culturelles en France », *Culture et Etudes,* Juillet 2020.

2- Corps et socialisation

<u>Sources</u> :

- Schotté Manuel, « Les possibles corporels: support biologique, déterminations sociales », Revue européenne des sciences sociales, Les usages sociaux des sciences du vivant, 54-1, 2016
- Darmon Muriel, Réparer les cerveaux. Sociologie des pertes et des récupérations post-AVC, Paris, La Découverte, 2021

3 - L'amour, c'est pour les filles ?

<u>Sources</u> :

- Clair Isabelle, 2011, « De la rencontre à l'installation: histoires de couples débutants », *Informations sociales*, n° 164, p. 53-62
- Diter Kévin, 2015, « Je l'aime, un peu, beaucoup, à la folie... pas du tout! ». La socialisation des garçons aux sentiments amoureux», *Terrains & travaux*, n° 27, p. 21-40

4 - Le choix du conjoint à l'ère numérique

<u>Sources</u> :

- Bergstrom Marie, 2013, « La loi du supermarché ? Sites de rencontres et représentations de l'amour », *Ethnologie française*, vol. 43, n° 3
- Bergstrom Marie, 2016, « Sites de rencontres : qui les utilise en France ? Qui y trouve son conjoint ? », *Populations & Sociétés*

5 – Militer chez les verts

<u>Sources</u>

- Jérome, Vanessa. *Militer chez les verts*. Presses de Sciences Po, 2021
- Jérome, Vanessa. « Engagement et carrières militantes chez Les Verts - EELV : un éternel recommencement ?». *EcoRev'*, vol. 42, no. 1,2015, pp. 48-54.

6 - Ecouter de la musique

<u>Sources</u>

- Eloy, Florence, et Tomas Legon. « Les formes de distinction parmi les jeunes auditeurs de rap et de r'n'b: d'une sociologie de la consommation à une sociologie de la réception », *Volume*, vol. 17:2, no. 2, 2020, pp. 167-183.
- Coulangeon, Philippe. « IV. Musique : la montée de l'éclectisme des goûts », Philippe Coulangeon éd.. Sociologie des pratiques culturelles. La Découverte, 2010, pp. 56-72.

7 - Faire grève

<u>Sources</u>

- Abdelnour, Sarah, et Sophie Bernard. « Faire grève hors du salariat et à distance ? Les pratiques protestataires des chauffeurs de VTC », *Mouvements*, vol. 103, no. 3, 2020, pp. 50-61(Extraits).
- Meuret-Campfort, Eve. « Dire la pénibilité du travail en crèche ? Une enquête auprès d'auxiliaires de puériculture syndicalistes », *Sociétés contemporaines*, vol. 95, no. 3, 2014, pp.81-108 (Extraits)

8 - Les Gilets jaunes : une mobilisation atypique ?

Sources

- Bendali Zakaria, Challier Raphaël, Délia Sudda Magali *et al.,* « Le mouvement des Gilets jaunes : un apprentissage en pratique(s) de la politique ? », *Politix,* 2019/4 (n° 128), p. 143-177 (Extraits).
- les Gilets jaunes, Collectif d'enquête sur, et al. « Enquêter *in situ* par questionnaire sur une mobilisation. Une étude sur les gilets jaunes », *Revue française de science politique,* vol. vol. 69, no. 5-6, 2019, pp. 869-892 (Extraits).

9 - Le travail familial du care

Sources

- Barnet-Verzat Christine, « Focus - Le temps des mères, le temps des pères », *Informations sociales,* 2009/3 (n° 153), p. 108-111.
- Courcy Isabelle, des Rivières-Pigeon Catherine, « Intervention intensive et travail invisible de femmes : le cas de mères de jeunes enfants autistes et de leurs intervenantes », *Nouvelles Questions Féministes,* 2013/2 (Vol. 32), p. 28-43

10 - Adolescence et liens sociaux

Sources

- Balleys Claire, *Grandir entre adolescents. A l'école et sur internet*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2015.
- Balleys Claire, « Gestion de l'intimité et affichage d'un territoire sentimental entre adolescents sur internet », *Agora Débats/jeunesses,* 2016/1, n°72

11 - La mondialisation des classes sociales

Sources

- Wagner Anne-Catherine, *La mondialisation des classes sociales*, Repères, Paris, la Découverte, 2020
- Cousin Bruno, Chauvin Sébastien, « Vers une hyper-bourgeoisie mondialisée ? », in *Manuel indocile des sciences sociales*, Paris, La Découverte, 2019.

12 - Transfuges de classe

Sources

- Naudet, Jules. « L'origine populaire comme ressource au sein des élites en France, aux États-Unis et en Inde », *Critique internationale,* vol. 64, no. B, 2014, pp. 81-99
- Eribon, Didier. *Retour à Reims*, Paris, Fayard, 2009

13 - Peut-on parler de classes sociales européennes ?

Sources

- Hugrée, Cédric, Étienne Penissat, et Alexis Spire. « Des frontières de classes transnationales ? », *Savoir/Agir,* vol. 48, no. 2, 2019a, pp. 53-63.
- Hugrée, Cédric, Étienne Penissat, et Alexis Spire. « Les conditions de travail : un marqueur des inégalités entre groupes socioprofessionnels en Europe », *Revue européenne des sciences sociales,* vol. 57-2, no. 2, 2019b, pp. 163-190.

14 - La sociologie de l'enfance

Sources

- Lahire Bernard (dir.), *Enfance de classe. De l'inégalité parmi les enfants,* Paris, Seuil, 2019.
- Lignier Wilfried, Prendre. *Naissance d'une pratique sociale élémentaire*, Paris, Seuil, 2019

15 - Travailler en caisse automatique

Sources
- Bernard Sophie, « Le travail de l'interaction, Caissières et clients face à l'automatisation des caisses », *Sociétés contemporaines*, 2014/2, n°94, pp.93-119

16 - On ne naît pas garçon, on le devient ?

Sources
- Denave Sophie, Renard Fanny, « Aspirants mécaniciens, aspirants coiffeurs. La construction de masculinités populaires différenciées », *Terrains & Travaux*, 2015/2, n°27.
- Court Martine, Menesson Christine, « Les vêtements des garçons, gouts et dégoûts parentaux au sein des classes moyennes », *Terrains & Travaux*, 2015/2, n°27.

17 - La légitimité culturelle: une question de temps ?

Sources
- Coavoux Samuel, « Planifier et sélectionner. Rapports au temps des visiteurs de musées et légitimité culturelle », *Actes de la Recherche en Sciences sociales*, 2019/1, n°226-227, pp 31-47

18 - L'école des élites

Sources
- Khan, Shamus. La nouvelle école des élites. *Agone*, 2015 (Extraits).
- Bertron, Caroline. « Savoir donner : les enjeux d'une définition scolaire de la philanthropie dans les pensionnats internationaux de Suisse romande », *Cahiers de la recherche sur l'éducation et les savoirs*[En ligne], 14. 2015. p. 99-101(Extraits)

19 - Les classes populaires à l'école

Sources
- Poullaouec, Tristan. « Regrets d'école. Le report des aspirations scolaires dans les familles populaires », *Sociétés contemporaines*, vol. 114, no. 2, 2019, pp. 123-150 (Extraits).
- Perier Pierre. « Le « choix » des adolescents. Décrochage parental et responsabilisation individuelle précoce des jeunes de milieux populaires » in R. Casanova et A. Vulbeau, *Adolescences entre défiance et confiance*, Presses universitaires de Nancy, Nancy, 2008 (Extraits)

20 - L'expérience du racisme

Sources
- Haddad Marine, « Des minorités pas comme les autres ? Le vécu des discriminations et du racisme des ultramarins en métropole », *Revue française de sociologie*, 2018/4 (Vol. 59), p.649-676.
- Cris Beauchemin, Christelle Hamel, Maud Lesne, Patrick Simon, « Les discriminations : une question de minorités visibles », *Population et société*, 2010, n°466

21 - Les variations sociales du rapport au temps

Sources
- Beaud Stéphane. « Un temps élastique. Etudiants des "cites" et examens universitaires », *Terrain*, n° 29, 1997, pp. 43-58
- Henri-Panabiere Gaële, Court Martine, Bertrand Julien, Bois Géraldine, Vanhee Olivier, « La montre et le martinet. Structuration temporelle de la vie familiale et inégalités scolaire », *Actes de de la Recherche en Sciences Sociales*, 2019/ 1-2, n°226-227.

22 - Enquêter dans les beaux quartiers

Sources
- Jounin Nicolas, *Voyage de classes. Des étudiants de Seine-Saint-Denis enquêtent dans les beaux quartiers*, Paris, La Découverte, 2016 (2014)

23 - Manger, un fait social

Sources

- Le Pape, Marie-Clémence, Plessz, Marie. « C'est l'heure du petit-déjeuner ? Rythme des repas, incorporation et classe sociale », L'Année sociologique 2017/1 (Vol. 67), p. 73-106, (Extraits).

24 - Consommation et classes sociales

Sources

- Amossé, Thomas, et Marie Cartier. « « Si je travaille, c'est pas pour acheter du premier prix ! ». Modes de consommation des classes populaires depuis leurs ménages stabilisés », *Sociétés contemporaines,* vol. 114, no. 2, 2019, pp. 89-122 (Extraits).

25 - Travail et suicide

Sources

- Deffontaines Nicolas, « Le suicide d'un éleveur bio. Quand le travail perd de son sens », *La nouvelle revue du travail [En* ligne], 18 I 2021 (Extraits).
- Baudelot, Christian, et Michel Gollac. « Que peuvent dire les suicides au travail ? », *Sociologie,* vol. 6, no. 2, 2015, pp. 195-206 (Extraits).

26 - Le handicap comme stigmate

Sources

- Gérard Bouvier et Xavier Niel, « Les discriminations liées au handicap et à la santé », INSEE Première,n°1308, 2010.
- Revillard, Anne. « La réception des politiques du handicap : une approche par entretiens biographiques », Revue française de sociologie, vol. vol. 58, no. 1,2017, pp. 71-95 (Extraits).

27 - Les « nouveaux » mouvements politiques

Sources

- Leclercq Catherine, « Les « nouveaux » mouvements politiques sont-ils nouveaux ? », Boursier Philippe, Pelletier Willy (dir). Manuel indocile des sciences sociales, Paris, La Découverte, 2019.

Allemand

Frankfurter Allgemeine Zeitung
- « Mehr über Wettbewerb reden“ : Laschet gibt Baerbock Kontra » (29/04/2021)

Spiegel Online
- « Jan Josef Liefers über #allesdichtmachen » In der DDR wäre ich für so ein Video wahrscheinlich in den Knast gekommen« » (29/04/2021)

Der Spiegel
- « Spaziergang für die Grünen » (05/05/2021)

Die Zeit
- « Bildungspolitik: der Nachilfeverein » (6/06/2021)

Süddeutsche Zeitung
- « Ursula von der Leyen: "Ich fühlte mich verletzt und alleingelassen" » (26/04/2021)

FAZ.net
- « Unrecht an Nama und Herero : Deutschland will Völkermord „ohne Beschönigung" benennen » (28/05/2021)

Der Tagesspiegel
- "Nehmt den Wessis das Kommando" Wie sich die Linke im Wahlkampf zur Anwältin der Ostdeutschen macht » (29/04/2021)

Süddeutsche Zeitung
- « Hohe Hürden für die Kleinen; Parteien wie die ÖDP und die Piraten müssen für die Zulassung ihrer Wahllisten viele Unterschriften sammeln. In Corona-Zeiten aber ist das schwierig. » (26/02/2021)

Die Welt
- « Wer hat den Mut, für Roma einzustehen? » (8/04/2021)

Süddeutsche Zeitung
- « Risikogruppen : Wenn Minderheiten auf der Intensivstation zur Mehrheit werden » (4/05/2021)

Anglais

Les textes proposés sont extraits de :

USA TODAY

- “ 'Please stop this violence': Security tightens in Minneapolis and nationwide ahead of jury deliberations in Derek Chauvin trial” (19/04/2021)

Mail Online

- “Every reason the woke National Trust placed 100 properties on BLM-inspired list of shame including homes of Winston Churchill, Rudyard Kipling and William Wordsworth” (22/09/2020)

The New York Times

- “ In Pulling Trump’s Megaphone, Twitter Shows Where Power Now Lies”. By Kevin Roosec(11/01/2021)
- “Johnson Pins U.K. Future on U.S. Ties, as European Bonds Loosen.”. By Mark Landler (16/03/2021)
- “Column on ‘Wokeness’ Ruining Disney World Experience Draws Backlash” (24/04/2021)
- “From Best Friends to Platonic Spouses” (1/05/2021)
- “In a Firm Voice, Queen Opens U.K. Parliament” (11/05/2021)
- “Nothing to Do With Climate Change : Conservative Media and Trump Align on Fires” (15/09/2020)
- “Is Mask-Slipping the New Manspreading?” (20/01/2021)

CNN Business

- « Wall Street's cops weren't ready for GameStop. They're paying attention now » (29/01/2021)

Time

- “In His Speech to Congress, Joe Biden Sets Out a Vision for ‘Competition, Not Conflict’ With China.” (29/04/2021)

Politico

- “White America: Awakened?” By Daniel Payne (25/05/2021)
- “Boris Johnson’s free speech brigade takes aim at Big Tech régulation » (30/04/2021)
- The British monarchy has a succession problem (16/04/2021)
- « Police are still killing people at the same rate as before » (25/05/2021)

CNN

- “The grim truth behind Britain's stately homes” (27/09/2020)
- “Brexit is just weeks old, and it's already threatening fragile political stability in Northern Ireland” (6/02/2021)
- “Guns: The US has a problem. Here's what to know” (4/06/2021)
- “What the controversy over ’Minari' says about being American” (1/03/2021)
- “Trump fights for a job that he's not doing as coronavirus rages Analysis” (18/12/2020)
- “A vaccination site meant to serve a hard-hit Latino neighborhood in New York instead serviced more Whites from other areas” (30/01/2021)

The Guardian

- “Church to consider removing or altering slavery monuments” (9/05/2021)
- “Plaid Cymru has a mountain to climb, but Welsh independence is no pipe dream” (1/05/2021)
- “Cancel culture’ is not the preserve of the left. Just ask our historians” (3/01/2021)
- “Why every single statue should come down” (1/06/2021)
- “How Meghan disrupted ‘invisible contract’ between royals and press” (13/03/2021)
- “The ‘free speech’ law will make university debate harder, not easier” (22/05/2021)
- “Don't expect Biden to trumpet lofty aims for his rescue plans- he's simply Mr Fix-it” (4/04/2021)

Foreign Policy

- “Brexit Is Probably the United Kingdom’s Death Knell “ (3/02/2021)

The Atlantic

- « The Professional Women Who Are Leaning Out » (2/05/2021)

News.com.au

- « Waming royal family may not survive when Queen dies » (1/02/2021)

The Daily Mail

- “Church of England paves the way for same-sex marriages after three years of behind-closed-doors arguments on issue - as Archbishops apologise for 'damage' caused to LGBT community” (10/11/2020)

NPR

- “Trump Supporters Storm U.S. Capitol, Clash With Police” (6/01/2021)
- “For One Immigrant Community, George Floyd's Death Isn't Just About Black And White” (4/06/2020)

Crisis Magazine

- “The Church of England’s Imminent Death Brings Opportunities” (20/04/2021)

Vanity Fair

- “With second impeachment acquittal, republicans pass another trump loyalty test (13/02/2021)

Vox

- « A disturbing, viral Twitter thread reveals how AI-powered insurance can go wrong” (27/05/2021)

Spiked Online

- “Racialising the crisis in policing” (7/08/2020)
- “The war for democracy is only beginning” (1/01/2021)

Chinois

Les textes proposés sont extraits de :

1/

《来了疫苗之後，谁来施打？》2021-06-08 04:43／联合报 / 贺陈旦/交通部前部长（台北市）

http://blog.sina.com.cn/s/blog_53ff33bd0102z9hs.html, consulté le 08/06/21

2/

《以比特币作为法定货币纯属幻想》王永利
来自：中国教育新闻网

https://finance.sina.com.cn/zl/china/2021-06-10/zl-ikqcfnca0253440.shtml, consulté le 10/06/21

Espagnol

Les textes proposés sont extraits de :

El País

- « Las reverberaciones del 15-M » (16/05/2021)
- « Los fantasmas de las calles de Ceuta » (26/05/2021)

Pagina/12

- "El presidente de El Salvador quiere que el Bitcoin sea una moneda de curso legal" (6/06/2021)

El Espectador

- "El caso de Sara Rogel, condenada a 30 anos de carcel por abortar en El Salvador" (1/06/2021)

Italien

Le texte proposé est extrait de :

Internazionale

- « Le buone maestre » (20/03/2021)

L'Espresso

- « Stop ai progetti multietnici, insulti aile donne e revisionismo sul 25 aprile : sulle Marche tira aria di Ventennio » (29/04/2021)

Il Fatto quotidiano

- « Rinascita-Scott, un maxiprocesso ignorato dai media : eppure la 'ndrangheta è dappertutto » (26/02/2021)

il Sole24ore

- « 2 giugno 1946, primo giorno della Repubblica. Le 21 madri della Costituzione » (1/06/2021)

Géographie

Commentaire de la carte d'Amiens au 1/25 000e
Document d'accompagnement : 2 cartes extraites du dossier INSEE Analyses « Amiens, une ville socialement contrastée » (source: Insee, Avril 2016)

Commentaire de la carte de Morzine / Massif du Chablais au 1/25 000e
Document d'accompagnement : extraits du site internet du Géoparc du Chablais (https://www.geoparc-chablais.com/)

Commentaire de la carte de Fort-de-France au 1/25 000e
Document d'accompagnement : « Le café, une filière d'excellence en Martinique », extrait du site www.martinique2030.com 2019.

Commentaire de la carte de Lac d'Issarlès / Thueyts / Sources de la Loire au 1/25 000e
Document d'accompagnement : carte extraite de la publication INSEE « Accessibilité des services au public dans l'Ardèche » (source: Insee Flash Auvergne-Rhône-Alpes N°10, Septembre 2016)

Commentaire de la carte de La Tour-du-Pin / Morestel au1/25 000e
Document d'accompagnement : 3 cartes relatives au SCOT Nord-Isère (source : Atlas pratique du SCOT Nord-Isère, Août 2020)

Commentaire de la carte de Mantes-la-Jolie au 1/25 000e
Document d'accompagnement : Photos aériennes du quartier du Val Fourré (1976). Source : Inventaire du patrimoine- île de France

Histoire contemporaine

La Commune (1870-1880)
L'Etat et l'économie dans le monde des années 1920 aux années 1980

Échecs et succès de la IVe République
Les Révolutions agricoles dans le monde au XX° siècle

Le Front populaire
Le nucléaire dans le monde, 1945-1995

Le septennat de Valéry Giscard d'Estaing
La Chine et le monde depuis 1919

Médias et pouvoir politique en France depuis la fin du XIXe siècle
Komintern et Kominform (1919-1956)

L'extrême-droite en France, années 1880-années 1990.
Les Etats-Unis et l'Europe de 1919 à 1941

La France au lendemain de la Première Guerre Mondiale
L'ONU dans les relations internationales (1945-années 1990)

Les classes moyennes en France entre la fin XIX° et la fin du XX°
La construction européenne (1950-1992)

L'urbanisation de la France des années 1880 aux années 1980
L'Europe communiste (1945-1989)

L'École en France des années 1870 aux années 1980.
La crise de 1929

Mathématiques

Voir Annexe :

Epreuve orale de mathématiques 2021, concours d'entrée à l'ENS de Lyon,
Série Sciences économiques et sociales

Sujet 1 - 2021

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x],\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\psi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\,dt.$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. L'endomorphisme ψ est-il injectif ? Est-il bijectif ?
3. L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?

Exercice 2. Soit $a \in]0,1]$. Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f définit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
4. On considère la variable aléatoire Y définie par :
$$Y = \frac{X^2}{2a}.$$
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.
   (c) En déduire que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{(4-\pi)a}{2}$.
   (d) Montrer que X^2 admet une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.
5. On suppose dans la suite que le paramètre $a \in]0,1]$ est inconnu.
Soient X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On note $S_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.
   (a) Donner un intervalle de la forme $[S_n - \alpha_n, S_n + \alpha_n]$ qui soit un intervalle de confiance de a au niveau 95%.
   (b) Déterminer une valeur de n à partir de laquelle la probabilité que a appartienne à l'intervalle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ soit supérieure ou égale à 95%.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. On dispose de trois boîtes dans lesquelles on place des jetons les uns après les autres. À chaque étape, un jeton est placé au hasard dans l'une des boîtes, les trois boîtes étant équiprobables.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre total de jetons placés dans les trois boîtes lorsque, pour la première fois, deux boîtes sont occupées par au moins un jeton.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre total de jetons placés dans les trois boîtes lorsque, pour la première fois, les trois boîtes contiennent au moins un jeton.

Exemple : si on place les trois premiers jetons dans la même boîte, le quatrième jeton dans une autre boîte et le cinquième jeton dans la boîte qui était restée vide jusque-là, alors X vaut 4 et Y vaut 5.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Calculer $\mathbb{P}(Y - X > X)$.

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à f si et seulement si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

On admet que si une fonction non identiquement nulle f possède une suite adaptée, alors cette suite est unique.
On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que si f est une fonction dérivable admettant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée, alors f' admet la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée.
3. On *admet* dans la suite que l'on peut définir une suite de polynômes $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

L'objectif est alors de montrer que pour tout p de $\mathbb{N}$, B_p appartient à E.

(a) Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E.
(b) Déterminer, pour tout entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

TSVP

(c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que B_{p-1} appartient à E et on cherche à montrer que B_p appartient aussi à E.

i. Montrer que si B_p appartient à E, alors sa suite adaptée est la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii. Montrer que la fonction $\varphi :\ x \mapsto \dfrac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est constante.

iii. Calculer $\displaystyle\int_0^{1/n} \varphi(x)\mathrm{d}x$.

iv. Conclure.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. Dans la suite de l'exercice, on cherche à résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation :

$$(E) \qquad M^2 = A.$$

   (a) Montrer que si M est une solution de (E), alors A et M commutent.
   (b) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M.
   (c) En déduire que si M est une solution de (E), alors M est diagonalisable.
   (d) Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 2. Soit a et b deux réels strictement positifs, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{b}\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a+1} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{si } x < b. \end{cases}$$

1. Justifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit alors que X suit la loi de Pareto de paramètres a et b.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X. On la notera F.
   (b) Pour x et y deux réels positifs, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \geq x+y | X \geq x)$ puis sa limite quand x tend vers $+\infty$.
   (c) X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.
3. On considère un réseau de télécommunication chargé de transmettre N mots, chaque mot étant formé de lettres.
   On suppose que le nombre de lettres d'un mot, exprimé en milliers, peut être modélisé par la variable aléatoire X définie à la question précédente.
   Exemples :
   Pour un mot comportant 43682 lettres, X est égale à $43,682$.
   Pour un mot comportant 15 lettres, X est égale à $0,015$.
   (a) Comment interpréter la limite obtenue dans la question 2.(b) dans le cadre de ce modèle ?

TSVP

(b) Pour ℓ réel strictement positif, on note n_ℓ le nombre de mots formés d'au moins ℓ milliers de lettres.

Démontrer que :

$$n_\ell = (1 - F(\ell))N$$

En déduire une expression de n_ℓ en fonction de N, a et b.

(c) On appelle X' la variable aléatoire qui représente le nombre de lettres d'un mot exprimé en centaines de milliers.

Exprimer X' en fonction de X puis montrer que X' suit aussi une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. On suppose que le nombre N_t de clients entrant dans un magasin pendant un intervalle de temps de longueur $t > 0$ suit une loi de Poisson de paramètre t.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n l'instant où le n-ième client entre dans le magasin.

1. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel t strictement positif, exprimer l'événement $[T_n \leqslant t]$ à l'aide de la variable N_t.
2. Déterminer la loi de T_1, son espérance et sa variance.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de T_n. On en donnera une expression sous forme d'une somme d'un nombre fini de termes.
4. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une densité de T_n et en déduire, pour tout entier naturel k, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^k \,\mathrm{d}t$.
5. La variable T_n possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2. Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est une matrice symétrique (respectivement antisymétrique) si et seulement si $A = {}^tA$ (respectivement $A = -\,{}^tA$).
Soit F l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques et dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = A + D$ où A est une matrice antisymétrique et D est une matrice diagonale.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère l'application $\varphi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\ M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \varphi(M) = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \text{ où } n_{i,j} = \begin{cases} -m_{i,j} & \text{si } i = j \\ m_{j,i} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. φ est-il diagonalisable ?
5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.
6. On se place dans le cas $n = 3$, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Déterminer l'image de M par la projection sur G de direction F.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout réel strictement positif a, $\displaystyle\int_0^a f(y)\ \mathrm{d}y \neq 0$.

   (b) Montrer que :

   $$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^a f(x+y)\ \mathrm{d}y = f(x)\int_0^a f(y)\ \mathrm{d}y$$

   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. On note $\alpha = f'(0)$.

   (a) Donner une relation simple entre f, α et f'.

   (b) Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \exp(-\alpha x)f(x)$ est constante. En déduire l'expression de f en fonction de α.
4. Soit X une variable aléatoire admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose de plus que :

   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = \mathbb{P}(X > y)$$

   À l'aide des questions précédentes, déterminer la loi de X.

Exercice 2. Dans cet exercice, on pourra admettre le résultat suivant :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \text{ pour toutes matrices } A, B \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On considère la matrice $K = I_3 + J$ où I_3 désigne la matrice unité et J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
L'objectif de cet exercice est de donner une expression de K^n pour tout entier naturel n.

Partie 1.

1. Pour tout entier naturel non nul n, déterminer une expression de J^n en fonction de J.
2. En déduire une expression de K^n.

Partie 2.

3. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

TSVP

4. (a) On suppose que J est diagonalisable.
   Quel est le rang de J ?
   Que peut-on en déduire sur le spectre de J ?

   (b) Soit $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Sans calculer P^{-1} justifier que P est inversible et que la matrice $D = P^{-1}JP$ est diagonale.

5. Déterminer une matrice Δ diagonale telle que $K = P\Delta P^{-1}$ où P est la matrice introduite dans la question précédente.

6. Retrouver alors l'expression de K^n.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit p un réel de $]0;1[$, soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
On définit alors une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$Y_1 = X_1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad Y_n = Y_{n-1}X_n$$

On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_{n-1} et X_n sont indépendantes.

1. Soit n un entier naturel non nul, déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Soit n un entier naturel non nul, déterminer la loi du couple (X_n, Y_n) et la covariance des variables X_n et Y_n.

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$$

1. Démontrer que la série de terme général u_k est convergente.

   On note $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la somme de cette série.

   Dans la suite on considère les fonctions f_k pour k entier naturel non nul définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(t) = 1 - (1 - e^{-t})^k$$

2. (a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} f_k(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) Soit k un entier naturel non nul. Calculer $I_{k+1} - I_k$. En déduire que : $I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

   (c) Soit m un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que :

$$\int_m^{m+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

   En déduire que un encadrement de I_{n-1}.

TSVP

3. (a) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^{n-1}$$

Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k \leq \int_{k-1}^{k} g_n(x)\mathrm{d}x \leq u_{k-1}$$

En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2, \quad \sum_{k=1}^{m} u_k \leq \int_0^m g_n(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=0}^{m-1} u_k$$

(b) Démontrer alors que :

$$S_n - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq S_n$$

(on pourra utiliser le changement de variable $t = x \ln 2$)

Démontrer enfin que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln 2}$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstration mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury interviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordé durant la préparation.

Exercice 1.

1. (a) Expliciter le terme général de la suite (b_n) définie par

$$b_0 = 0,\ b_1 = 1 \text{ et, pour entier } n \geqslant 2,\ b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$$

(b) On considère trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par :

$$a_0 = 0,\ b_0 = 0,\ c_0 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 1,\quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{4} b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} \end{cases}$$

Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

2. Une urne A contient au départ deux boules numérotées 1 et une urne B contient deux boules numérotées 0.
On extrait au hasard et simultanément de chacune des deux urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules dans l'urne A après n expériences du type décrit précédemment.
X_0 est donc la variable certaine égale à 2.

(a) Déterminer la loi de X_n.

(b) Justifier que X_n admet une espérance et la calculer.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ et $||.||$ la norme associée.

1. (a) Montrer que -1 est valeur propre de A. Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre $E_{-1}(A)$ associé.

(b) Déterminer une base de l'orthogonal de $E_{-1}(A)$. Justifier que $(E_{-1}(A))^{\perp}$ est un sous-espace propre de A.

(c) f est-il diagonalisable ?

(d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $E_{-1}(f)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique réel λ_u tel que :

$$u = \lambda_u . e + u', \quad \text{avec} \quad \langle u', e \rangle = 0$$

TSVP

3. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On précisera en particulier le cas d'égalité.

4. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3, \langle u, f(u)\rangle = 0\}$

   (a) Démontrer que $u \in F \Leftrightarrow |\lambda_u| = ||u'||$.

   (b) Soit u et v dans F. Montrer que $u+v$ est un élément de F si et seulement si $\lambda_u \lambda_v = \langle u', v'\rangle$. En déduire que $u+v$ est un élément de F si et seulement si la famille (u, v) est liée.

   (c) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstration mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury interviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordé durant la préparation.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geqslant 2$ et soit f un endomorphisme de E.

1. Soit $(a_1, \ldots, a_k)$ une famille de vecteurs de E tels que la famille $(f(a_1), \ldots, f(a_k))$ soit libre.
   Montrer que $(a_1, \ldots, a_k)$ est libre.

2. On suppose dans cette question que $f \circ f$ est l'application nulle.
   En déduire une relation d'inclusion entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

   (a) Justifier que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$.

   (b) Dans la suite, on considère $(e_1, \ldots, e_k)$, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Justifier l'existence de k vecteurs de E, $a_1, \ldots, a_k$, ayant $e_1, \ldots, e_k$ pour images respectives par f.

   (c) Montrer que la famille $(a_1, \ldots, a_k, e_1, \ldots, e_k)$ est libre.

   (d) En déduire une base et la dimension de E.

Exercice 2.

1. (a) Démontrer que pour n entier naturel non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

   Dans la suite, pour n entier naturel non nul, on notera : $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

   (b) Démontrer que pour n entier naturel non nul, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

   (c) Calculer $\Gamma(1)$, en déduire une expression de $\Gamma(n)$ en fonction de n (et sans intégrale).

2. Pour λ réel strictement positif et n entier naturel non nul, on définit la fonction $f_{\lambda,n}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\lambda,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}e^{-\lambda x}x^{n-1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   Justifier que $f_{\lambda,n}$ est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire de densité $f_{\lambda,n}$, on dit que X suit la loi gamma de paramètres λ et n et on note $X \hookrightarrow \gamma(\lambda, n)$.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0;1]$ et un réel strictement positif θ.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_k = -\dfrac{1}{\theta}\ln(U_k)$. Montrer que la variable aléatoire X_k est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

TSVP

Dans la suite, on admet que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi $\gamma(\theta, n)$.

4. Soit $Z = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^{n+1} U_k < e^{-\theta} \right\}$

   (a) Déterminer la probabilité de l'événement $[Z = 0]$.

   (b) Soit n un entier naturel non nul, justifier que :

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}\left(1 < \sum_{k=1}^{n+1} X_k\right) - \mathbb{P}\left(1 < \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

   (c) En déduire la loi de Z.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On note D l'ensemble des couples (x, y) de réels vérifiant :

$$x > \frac{1}{4}, \quad y > \frac{1}{4}, \quad x + y < \frac{3}{4}.$$

On admet que les résultats connus pour l'optimisation des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ sont encore valables sur D.
Soit f la fonction définie sur D par :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy(x + y)}.$$

1. Vérifier que :
$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x + y}.$$
2. Justifier que f n'a pas d'extremum sur D.
3. Justifier que pour tout élément (x, y) de D on a :
$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{4}.$$
En déduire que f est majorée sur D.
4. Démontrer que f est minorée par 2 sur D.

Exercice 2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) f n'est pas bijectif.
(P2) f admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que $|\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n|$.
(P3) Pour tous entiers i et j de $[\![1, n]\!]$, si $i \neq j$, alors $E_{\lambda_j} \subset (E_{\lambda_i})^{\perp}$.

1. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice diagonale suivante :
$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 0 & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & n-2 \end{pmatrix}$$
L'endomorphisme g vérifie-t-il les propriétés (P1), (P2) et (P3) ?

TSVP

2. Montrer que $\lambda_1 = 0$.

3. Montrer que $\text{Im}(f)$ est l'orthogonal de $\text{Ker}(f)$.

Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note p_i le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.
On note p le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

4. (a) Montrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, si $i \neq j$, alors $p_i \circ p_j$ est l'endomorphisme nul.

   (b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de $E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_n}$ vérifiant :
$$x = x_1 + \cdots + x_n$$

   (c) En déduire que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $p_i(x) = x_i$.

   (d) Montrer que $f = \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_n p_n$.

On admet dans la suite qu'on démontrerait de même que $p = p_2 + \cdots + p_n$.

On note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme de E défini par :
$$\widetilde{f} = \frac{1}{\lambda_2} p_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} p_n$$

5. Montrer que $f \circ \widetilde{f} = p$.

6. Montrer que pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$,
$$\text{d}(z, \text{Im}(f)) = \|f(x) - z\| \Longleftrightarrow x - \widetilde{f}(z) \in \text{Ker}(f)$$
où $\text{d}(z,\text{Im}(f))$ désigne la distance de z au sous-espace vectoriel $\text{Im}(f)$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Justifier que pour x réel strictement positif l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.
   Que pouvez-vous dire dans le cas où $x \leqslant 0$?

On définit alors la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

2. (a) Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
3. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
   (b) En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer φ'.
   (c) Retrouver alors le résultat de la question 2.(a).
4. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2}{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire un équivalent simple de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, associe le polynôme :

$$x \mapsto (x^2-1)P'(x) - axP(x)$$

où a désigne une constante réelle.

1. Déterminer la constante a pour que l'image de $\mathbb{R}_n[x]$ par φ soit incluse dans $\mathbb{R}_n[x]$.

Dans la suite, a est supposé être égal à cette valeur et on note ψ l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$ qui à P associe $\varphi(P)$.

2. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

TSVP

3. Soit k un entier naturel tel que $2k \in [\![0, n]\!]$.
   On définit alors les polynômes P_k et Q_k par :

$$P_k \ : \ x \mapsto (x^2-1)^k(x+1)^{n-2k} \quad \text{et} \quad Q_k \ : \ x \mapsto (x^2-1)^k(x-1)^{n-2k}$$

   Calculer $\psi(P_k)$ et $\psi(Q_k)$.

4. (a) ψ est-il diagonalisable ?
   (b) ψ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$?

5. On note d l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}_n[x]$ et pour tout entier naturel non nul p, on note ψ^p l'endomorphisme $\psi \circ \psi \ldots \psi$ (p fois).
   Peut-on trouver un entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que $\psi^p = d$?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstration mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury interviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordé durant la préparation.

Exercice 1.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul et $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.
On considère u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On définit alors u^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tA$, la transposée de la matrice A.

1. Montrer que, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset (\mathrm{Ker}(u^*))^\perp$.
3. Montrer que $(\mathrm{Im}(u))^\perp \subset \mathrm{Ker}(u^*)$.
4. En déduire que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}(u^*))^\perp$

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$
   (a) Justifier que f est prolongeable en une fonction continue et dérivable à droite en 0.
   On pourra remarquer pour cela que :
$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^2} \times \frac{x}{\sin(x)}$$
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. On admet qu'elle est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Soit φ une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Démontrer que :
$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^b \varphi(t) \sin(xt) \mathrm{d}t = 0.$$
   (on pourra commencer par une intégration par parties)
3. (a) Soit n un entier naturel, justifier que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$ sont convergentes.
   (b) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$

TSVP

4. On note, pour n entier naturel, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

   On rappelle que pour tous réels p et q, $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n - I_{n-1} = 0$.

   (c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

5. Soit a est un réel strictement positif. Déterminer la limite de $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} \mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$. On pourra distinguer 3 cas : $a = \frac{\pi}{2}$, $a < \frac{\pi}{2}$ et $a > \frac{\pi}{2}$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. On considère une urne contenant des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes en proportions respectives b, r, v avec $b + r + v = 1$.
On effectue alors des tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche, Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge et D la variable aléatoire $|X - Y|$.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Déterminer la loi de D.

Exercice 2.

1. (a) Justifier que pour tout x de $]0, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2\cos(kx) = \mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx}$.
   (b) En déduire que pour tout x de $]0, \pi]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$,
   $$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.
3. On note f l'application définie sur $[0, \pi]$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0, \pi] \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et calculer $f'(0)$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   On pourra effectuer une intégration par parties.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $u_n = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que :
   $$\sum_{k=1}^{n} u_k = -2 + I_n + J_n$$
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.